El uso de este material fuera de la correspondiente clase queda bajo la exclusiva responsabilidad del usuario ①

Ceros

Sea $f : D \to \mathbb{C}$, D abierto conexo. f holomorfa en D

$z_0 \in D$ es cero de f si y sólo si $f(z_0)=0$

si y sólo si $f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z)$ con φ holo y $\varphi(z_0) \neq 0$.

$(n \geq 1)$

n: orden del cero.

Singularidades

$f : D \to \mathbb{C}$, holomorfa en D (y no holomorfa en $\mathbb{C}-D$)

$z_0 \notin D$ es singularidad de f si es pto de acumulación de D.

Singularidad aislada: si z_0 es singularidad, pero f es holomorfa en algún entorno reducido de z_0.

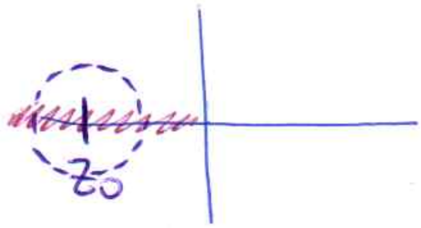
(es decir, existe $r>0$ tal que f es holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r\}$)

Ejemplos

① $f(z) = \frac{1}{z}$ $z_0 = 0$ sing. aislada

② $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+i)}$: $z_0 = 1$ y $z_0 = -i$: sing. aislada.

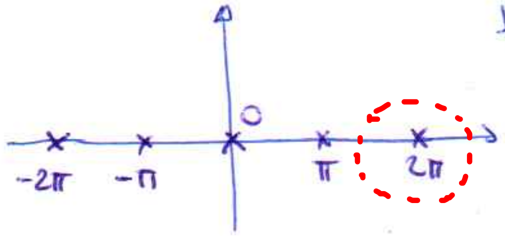
③ $f(z) = \operatorname{Log}(z)$ $\{z : z = x+0i, x \leq 0\}$ singularidades NO aisladas.



(4) - $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$ Singularidades: $z_0: \operatorname{sen} z_0 = 0$

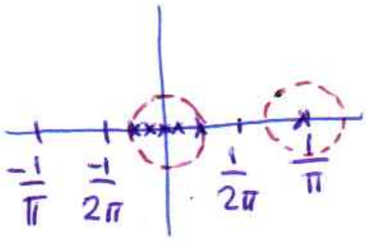
$z_{0_k} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

todas aisladas



(5) $f(z)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)}$ sing: $z_0 : \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z_0}\right)=0$ y $z_0=0$

$z_{0_k} = \dfrac{1}{\pi k}, \; k \in \mathbb{Z}, k \neq 0 \qquad z_0 = 0$



z_{0_k} : aislada

$z_0=0$: no aislada

(6) $f(z)=\dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$ sing: $z_0=0$, aislada

(7) $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2+1}$ sing: $z_0=i \quad z_0=-i$ aislados.

Desarrollo de Laurent en entorno de sing. aislada.

Sea z_0 sing. aislada de f.

f holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r\}$ para algún r.

Allí admite D.S.L:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \cdots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

C: contorno cerrado simple^{+} en $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < r\}$ y $z_0 \in RI(C)$

Importantísimo: $k=-1$:

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz$$

c_{-1}: Residuo de f en z_0

$c_{-1} = \text{Res}(f, z_0)$

Ejemplos:

$$\int_C \underbrace{\frac{e^{1/z}}{z^6}}\,dz \qquad C: \text{circunf. } |z|=5.$$

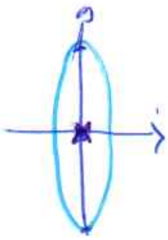
$f(z)$ holo en $z \neq 0$.

Por serie: $$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z}\right)^k = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \cdots \qquad |z|>0$$

$$\frac{e^{1/z}}{z^6} = \frac{1}{z^6} + \frac{1}{z^7} + \frac{1}{2z^8} + \cdots$$

$$\Rightarrow c_{-1} = 0 \Rightarrow \int_C \frac{e^{1/z}}{z^6}\,dz = 0$$

$$\int_C z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)dz \qquad C: \text{elipse } 25x^2+y^2=1$$



$$z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \cdots\right) \quad |z|>0$$

$$\operatorname{Sen}(\omega) = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \frac{\omega^7}{7!} + \cdots \qquad \omega = \frac{1}{z}$$

$$z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = \left(z^3 - \frac{1}{3!}z + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{7!z^3} + \cdots\right)$$

$c_{-1}=$

$c_{-2}=$

$c_{-3}=$

$$\int z^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right)dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{5!}$$

Clasificación de sing. aisladas

z_0 sing aislada de f $\Rightarrow$ f holo en $0<|z-z_0|<r$ para algún $r>0$

$$f(z) = \underbrace{\dots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)}}_{\text{parte principal del DSL}} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots \quad \Big\} \text{ DSL válido en } 0<|z-z_0|<r$$

Ⓘ. z_0 es sing **EVITABLE** si $c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = \dots = 0$ $\quad (c_{-n}=0 \ \forall n \in \mathbb{N})$

(parte principal nula)

Ⓘⓘ z_0 es polo de orden n si $c_{-(n+1)} = c_{-(n+2)} = \dots = 0$ $\quad (c_{-k}=0, \ k>n)$

parte principal: $\qquad$ y $c_{-n} \neq 0$

$$\frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0}$$ $\to$ una cantidad finita de términos

(polos de orden 1 = "polos simples")

Ⓘⓘⓘ z_0 es sing esencial si no es evitable y no es polo.

$\therefore$ existen infinitos coef. no nulos en parte principal.

(parte principal: infinitos términos)

Ejemplos: $\quad c_{-1}= \quad c_0= \quad c_1= \quad c_{-2}=$

① $f(z) = \frac{1}{z}$ $\qquad z_0=0$ polo de orden 1.

② $f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + z$ $\qquad z=0$: polo de orden 2

③ $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{5!}z - \dots$

$z_0=0$: polo orden 3

$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{-1}{3!}$

(4) $f(z) = z^4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z}\right) = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{5!z} - \frac{1}{7!z^3} + \frac{1}{9!z^5} - \dots \quad |z|>0$

$z=0$: sing esencial

$\operatorname{Res}(f,0) = \frac{1}{5!}$

(5) $f(z) = \frac{e^{1/z}-1}{z} = \frac{1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots - 1}{z} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{3!z^4} + \dots$

$|z|>0$

$z_0=0$ sing esencial

$\operatorname{Res}(f,0)=0$

(6) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z} = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots - 1\right)\cdot\frac{1}{z} = -\frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \dots$

$z_0=0$ sing evitable

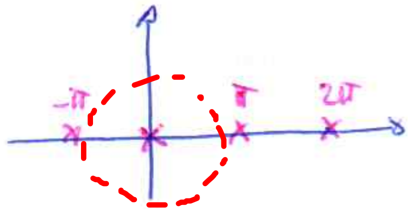
$\operatorname{Res}(f,0)=0$.

(7) $f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^2}$

$z_0=0$: ....

$\operatorname{Res}(f,0)=$ .....

(8) $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}$ $\qquad z_0=0$? es aislada!



DSL?

$f(z) = \frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}$ $\qquad 0<|z|<\pi$

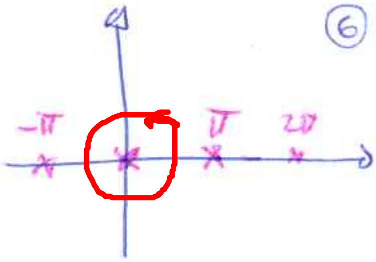
$= \frac{1}{z}\cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots}}_{\varphi(z)} = \frac{1}{z}\cdot\varphi(z)$ con $\varphi(0)=1$, φ holomorfa en $|z|<\pi$

$= \frac{1}{z}\cdot\underbrace{\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right)}_{\text{DSTaylor de } \varphi} = \frac{\overset{\varphi(0)}{a_0}}{z} + a_1 + a_2 z + \dots$

$\Rightarrow z_0=0$ es polo simple de f y $\operatorname{Res}(f,0) = a_0 = \varphi(0) = 1$

$$\Rightarrow \int_C \frac{1}{\operatorname{sen}(z)}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) = 2\pi i$$

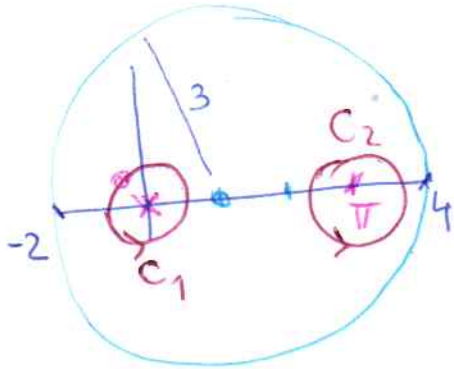
$\hookrightarrow C$: circ $|z|=2$



Calcular:

$$\int_C \frac{1}{\operatorname{sen} z}\,dz = ?$$

$\hookrightarrow C$: circ $|z-1|=3$



$$\int_C \frac{1}{\operatorname{sen} z}\,dz = \int_{C_1} \frac{1}{\operatorname{sen} z}\,dz + \int_{C_2} \frac{1}{\operatorname{sen} z}\,dz =$$

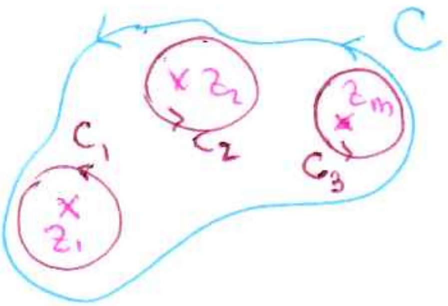
$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f,0) + 2\pi i \operatorname{Res}(f,\pi) = \ldots$$

Teorema (de los Residuos)

Sea C contorno cerrado simple, positivamente orientado, dentro del cual y sobre el cual f es holomorfa, excepto en una cantidad finita de puntos singulares $z_1, z_2, \ldots z_m$, interiores a C.

Entonces:

$$\int_C f(z)\,dz = \left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_k)\right) \cdot 2\pi i$$

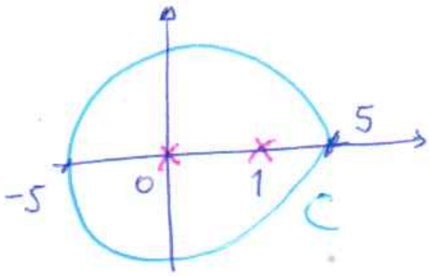


$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \int_{C_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_k)$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Ejemplo

$$\int_C \underbrace{\frac{z+2}{z(z-1)}}_{f(z)}\, dz \qquad C: \text{circ } |z|=5$$



$$\int_C f(z) = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,1)\right)$$

$$f(z) = \frac{z+2}{z}\cdot\frac{1}{z-1} = \left(1+\frac{2}{z}\right)\cdot\frac{(-1)}{1-z} = \left(1+\frac{2}{z}\right)\left(-1-z-z^2-z^3-\dots\right) \quad 0<|z|<1$$

$$= -1-z-z^2-z^3 \dots -\frac{2}{z} - 2 - 2z - 2z^2$$

$$= -\frac{2}{z} - 3 - 3z - 3z^2 \dots \qquad \text{válido en } 0<|z|<1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,0) = -2$$

$$f(z) = \frac{z+2}{z}\cdot\frac{1}{z-1} = \left(1+\frac{2}{z-1+1}\right)\cdot\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z-1}\cdot\left(1+2\left(1-(z-1)+(z-1)^2-\dots\right)\right)$$

si $0<|z-1|<1$

$$= \frac{1}{z-1}\left(3-2(z-1)+2(z-1)^2-\dots\right)$$

$$= \frac{3}{z-1} - 2 + 2(z-1) - \dots \qquad \text{válido en } 0<|z-1|<1$$

$$\Rightarrow \int_C f(z)\,dz = 2\pi i(-2+3) = 2\pi i$$

Resultados útiles para clasificar singularidades.

Sea z_0 una sing. aislada de f.

a) z_0 es sing evitable $\Leftrightarrow$ existe (finito) $\lim_{z\to z_0} f(z)$

b) z_0 es polo orden m $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z) = \infty \quad 0\le k<m$

y $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) = L, \; L\neq 0, \; L\neq\infty$

c) z_0 es sing esencial $\Leftrightarrow$ no existen $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^k f(z)$, $k\geq 0$

DSL en $0<|z-z_0|<r$

$$\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{z-z_0}+c_0+c_1(z-z_0)+\cdots$$

Además:

Sea z_0 polo orden m:

$$f(z)=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots+\frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2}+\frac{c_{-1}}{(z-z_0)}+c_0+c_1(z-z_0)\cdots, \quad c_{-m}\neq 0$$

válido en $0<|z-z_0|<r$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}\Big[\underbrace{c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{m-2}+\cdots}\Big]$$

serie de potencias convergente en $|z-z_0|<r$
$\Rightarrow$ converge a una f. holomorfa, $\varphi(z)$

$$\boxed{f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)}$$ con φ holomorfa en entorno de z_0 y $\varphi(z_0)=c_{-m}\neq 0$.

Recíproca también es cierta. Entonces:

Teorema:
z_0 es polo de orden m de f $\Leftrightarrow$ existe φ holomorfa en entorno de z_0 con $\varphi(z_0)\neq 0$ y $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ en entorno de z_0

Corolario: Sea z_0 un cero de orden m de $g(z)$, g holomorfa en entorno de z_0 $\Rightarrow$ $f(z)=\dfrac{1}{g(z)}$ tiene polo de orden m en z_0.

Dem. $g(z)=(z-z_0)^m\cdot\alpha(z)$ con $\alpha(z)$ holo en entorno de z_0 y $\alpha(z_0)\neq 0$

$\Rightarrow f(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\cdot\dfrac{1}{\alpha(z)}=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)$ donde $\varphi(z)=\dfrac{1}{\alpha(z)}$, holo en entorno de z_0 y

$$\varphi(z_0)=\frac{1}{\alpha(z_0)}\neq 0$$

Corolario. Sean f y g holomorfas en entorno de z_0,

z_0 es cero de orden m de f y cero de orden k de g.

Sea $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$

Entonces:

a) si $m > k$, z_0 es sing evitable de h y $\lim_{z \to z_0} h(z) = 0$

b) si $m = k$ z_0 es sing evitable de h y $\lim_{z \to z_0} h(z) \neq 0$

c) si $m < k$ z_0 es ~~sing~~ polo orden $k-m$ de h

Dem:

$$f(z) = (z-z_0)^m \alpha(z)$$
$$g(z) = (z-z_0)^k \beta(z)$$

α, β holomorfas en entorno de z_0 y $\alpha(z_0) \neq 0$, $\beta(z_0) \neq 0$

$$h(z) = (z-z_0)^{m-k} \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$$

$z \neq z_0$

$\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ holo en entorno de z_0

$\frac{\alpha(z_0)}{\beta(z_0)} \neq 0$

Teorema de Picard

Sea z_0 una sing esencial de f.

Entonces, para todo entorno U de z_0, y para todo $\omega \in \mathbb{C}$, excepto, quizás uno, $f(z) = \omega$ tiene infinitas soluciones en el entorno U.

Ejemplo: $f(z) = e^{1/z}$ $z_0 = 0$ sing esencial.

Sea $U_\varepsilon = \{z : |z| < \varepsilon\}$.

Sea $\omega = 1+i$

$f(z) = e^{1/z} = 1+i$ tiene por soluciones:

$$z_k = \frac{1}{\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\to$ existen infinitos de esos en U_ε.

Show de ejemplos.

Clasificar singularidades.

① $h(z) = \dfrac{(\cos z - 1)}{z^5}$

Sean $f(z) = (\cos z - 1) \to$ en $z_0 = 0$ tiene cero de orden 2 : $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = -1 \neq 0$

$g(z) = z^5 \to$ en $z_0 = 0$ tiene cero de orden 5

$\Rightarrow h(z) = \dfrac{z^2 \alpha(z)}{z^5} \underset{z\neq 0}{=} \dfrac{\alpha(z)}{z^3}$ con $\alpha(z)$ holo y $\alpha(0) \neq 0$

$z_0 = 0$ es polo orden 3 de h.

② $h(z) = \dfrac{(\cos z - 1)^3}{z^5}$

Sean: $f(z) = (\cos z - 1)^3 = (z^2 \cdot \alpha(z))^3 = z^6 \cdot \alpha^3(z)$ con $\alpha^3(z)$ holo y $\alpha^3(0) \neq 0$

$\Rightarrow z_0 = 0$ es cero de orden 6 de f

$g(z) = z^5 \to z_0 = 0$ cero de orden 5 de g

$\Rightarrow h(z) = \dfrac{z^6 \alpha^3(z)}{z^5} \underset{\text{si } z \neq 0}{=} z \cdot \alpha^3(z) \Rightarrow z_0 = 0$ es sing evitable de h.

③ $h(z) = \dfrac{1 - \cos(z^2)}{\operatorname{sen}(z^2)}$ en $z_0 = 0$?

Sean $f(z) = 1 - \cos(z^2) = 1 - \left(1 - \dfrac{(z^2)^2}{2!} + \dfrac{(z^2)^4}{4!} \dots\right) = \dfrac{z^4}{2!} - \dfrac{z^8}{4!} + \dots = z^4 \underbrace{\left(\dfrac{1}{2!} - \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^8}{6!} \dots\right)}_{\alpha(z)}$

$= z^4 \cdot \alpha(z)$ con α holo y $\alpha(0) \neq 0$

$g(z) = \operatorname{sen}(z^2) = z^2 - \dfrac{(z^2)^3}{3!} + \dfrac{(z^2)^5}{5!} - \dots = z^2 \underbrace{\left(1 - \dfrac{z^4}{3!} - \dfrac{z^8}{5!} + \dots\right)}_{\beta(z)}$

$= z^2 \cdot \beta(z)$ β holo, $\beta(0) \neq 0$

$$h(z) = \frac{z^{4}\alpha(z)}{z^2\beta(z)} \underset{\text{si } z\neq 0}{=} z^2 \frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$$ con $\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}$ holo en entorno de z_0 y $\frac{\alpha(0)}{\beta(0)} \neq 0$

$\Rightarrow h(z)$ tiene sing evitable en $z=0$

④ $h(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{1-\cos(z^2)}$ en $z_0=0$?

$$h(z) = \frac{1}{z^2}\,\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$$ con $\frac{\beta(z)}{\alpha(z)}$ holo en entorno de 0, $\frac{\beta(0)}{\alpha(0)} \neq 0$

$\Rightarrow h$ tiene polo de orden 2 en 0.

⑥ $f(z) = \operatorname{tg}(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(z)}{\cos(z)}$

Sing: $z : \cos(z) = 0$

$z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$

z_k son ceros de orden 1 del denominador, y no anulan el numerador.

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z-z_k)\cdot \alpha_k(z)}$$ con $\alpha_k(z)$ holo en entorno de z_k y $\alpha_k(z_k) \neq 0$

$\Rightarrow z_k$: polos simples de f

⑦ $f(z) = \dfrac{1}{e^z - 1}$ en $z_0 = 0$

$$f(z) \underset{\text{si } 0<|z|<2\pi}{=} \frac{1}{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}\cdots - 1} = \frac{1}{z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots} = \frac{1}{z}\underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\cdots}\right)}_{\alpha(z)} = \frac{1}{z}\cdot\alpha(z)$$

con $\alpha(z)$ holo en entorno de 0

y $\alpha(0) \neq 0$.

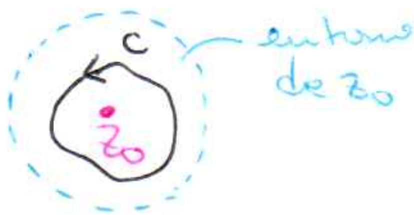
$\Rightarrow z_0 = 0$ es polo simple

Cálculo de residuos

- Si z_0 es sing evitable de f ($z_0 \in \mathbb{C}$) $\Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = 0$

- Si z_0 es polo orden m de f:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m} \quad \text{con } \varphi(z) \text{ holo en entorno de } z_0, \ \varphi(z_0) \neq 0$$



$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}\,dz \underset{\text{FICG}}{\overset{\downarrow}{=}} \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} =$$

$$\varphi(z) = \begin{cases} (z-z_0)^m f(z) & \text{si } 0 < |z-z_0| < r \\ a & z = z_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} = \left. \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} \left((z-z_0)^m f(z) \right) \right|_{z \to z_0} \cdot \frac{1}{(m-1)!}$$

$$\boxed{\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} \left((z-z_0)^m f(z) \right)} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Si z_0 es polo simple: $(m=1)$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$$

Si z_0 es polo doble: $(m=2)$

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left((z-z_0)^2 f(z) \right)'$$